Développements limités usuels en 0

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e^x} &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\mathbf{sh}\ \boldsymbol{x} &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\mathbf{ch}\ \boldsymbol{x} &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)\\
\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(1+x)^\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{1-x}} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\mathbf{ln}\boldsymbol{(1-x)} &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{1+x}} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\mathbf{ln}\boldsymbol{(1+x)} &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\sqrt{1+x}} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\mathbf{Arctan}\ \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\mathbf{Argth}\ \boldsymbol{x} &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\mathbf{Arcsin}\ \boldsymbol{x} &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{1\times3\times\cdots(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\mathbf{Argsh}\ \boldsymbol{x} &= x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1\times3\times\cdots(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{th}\ \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)\\
\mathbf{tan}\,\boldsymbol{x} &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)
\end{aligned}
$$

Développements en série entière usuels

e^{ax}	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$		$a \in \mathbb{C}\,,\ x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$

$(1+x)^{\alpha}$	$=$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$	$(\alpha \in \mathbb{R})$	$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\dfrac{1}{a-x}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\dfrac{1}{(a-x)^2}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\dfrac{1}{(a-x)^k}$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\ln(1-x)$	$=$	$\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$		$x \in [\,-1\,;1\,[$
$\ln(1+x)$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,]$
$\sqrt{1+x}$	$=$	$\displaystyle 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$=$	$\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\operatorname{Arctan} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in [\,-1\,;1\,]$
$\operatorname{Argth} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\operatorname{Arcsin} x$	$=$	$\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\operatorname{Argsh} x$	$=$	$\displaystyle x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle\vert\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{cotan} x$		$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$		$1 - \operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R}^*$
$\operatorname{Arcsin} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arccos} x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arctan} x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argsh} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argch} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1\,;+\infty[$
$\operatorname{Argth} x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1\,;1[$

Primitives usuelles

I Polynômes et fractions simples

Fonction		Primitive	Intervalles
$(x-x_0)^n$	$x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$: $x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})$: $x \in \left]-\infty\,;x_0\right[\,,\,\left]x_0\,;+\infty\right[$
$(x-x_0)^\alpha$	$x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\left]x_0\,;+\infty\right[$
$(x-z_0)^n$	$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\left]-\infty\,;a\right[\,,\,\left]a\,;+\infty\right[$
$\dfrac{1}{x-(a+\mathrm{i}b)}$	$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right] + \mathrm{i}\ \mathrm{Arctan}\ \dfrac{x-a}{b}$	$\mathbb{R}$

II Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$\left]0\,;+\infty\right[$
$e^{\alpha x}$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\mathrm{cotan}\ x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\left]k\pi\,;(k+1)\pi\right[$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln(\mathrm{ch}\ x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{coth}\ x$	$\ln\lvert\mathrm{sh}\ x\rvert$	$\left]-\infty\,;0\right[\,,\,\left]0\,;+\infty\right[$

III Puissances et inverses de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x - x$	$]\, k\pi \,;\, (k+1)\pi \,[$
$\operatorname{sh}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth}^2 x$	$x - \operatorname{coth} x$	$]-\infty \,;\, 0\,[\;,\;]\,0 \,;\, +\infty\,[$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln \left\lvert \tan \dfrac{x}{2} \right\rvert$	$]\, k\pi \,;\, (k+1)\pi \,[$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln \left\lvert \tan \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right\rvert$	$\left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln \left\lvert \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right\rvert$	$]-\infty \,;\, 0\,[\;,\;]\,0 \,;\, +\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arctan} e^x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x$	$]\, k\pi \,;\, (k+1)\pi \,[$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{coth}^2 x - 1$	$-\operatorname{coth} x$	$]-\infty \,;\, 0\,[\;,\;]\,0 \,;\, +\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^4 x}$	$-\operatorname{cotan} x - \dfrac{\operatorname{cotan}^3 x}{3}$	$]\, k\pi \,;\, (k+1)\pi \,[$
$\dfrac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \dfrac{\tan^3 x}{3}$	$\left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[$

IV Fonctions dérivées de fonctions réciproques

Fonction		Primitive	Intervalles
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{Argth} x \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+x}{1-x}\right\| \end{cases}$	$\begin{cases}]-1\,;1\,[\\ ]-\infty\,;-1\,[\ , \\ ]-1\,;1\,[\ ,\ ]\,1\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{Argth}\dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{a+x}{a-x}\right\| \end{cases}$	$\begin{cases}]-\|a\|\,;\|a\|\,[\\ ]-\infty\,;-\|a\|\,[\ , \\ ]-\|a\|\,;\|a\|\,[\ ,\ ]\,\|a\|\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1\,;1\,[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\|a\|}$	$]-\|a\|\,;\|a\|\,[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{Argch} x \\ -\operatorname{Argch}(-x) \\ \ln\|x+\sqrt{x^2-1}\| \end{cases}$	$\begin{cases}]\,1\,;+\infty\,[\\ ]-\infty\,;-1\,[\\ ]-\infty\,;-1\,[\ \text{ou}\ ]\,1\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\|$	$\begin{cases} a>0\ :\ \mathbb{R} \\ a<0\ : \\ \quad]-\infty\,;-\sqrt{-a}\,[\\ \quad \text{ou}\ ]\sqrt{a}\,;+\infty\,[\end{cases}$
$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$

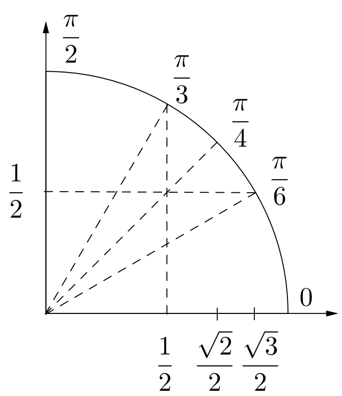
Trigonométrie

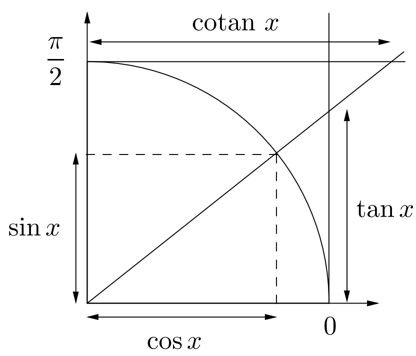
I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\text{cotan } x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\text{cotan } x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\text{cotan } x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\text{cotan } x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\text{cotan } x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \text{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\text{cotan } x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin , Arccos , Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arcsin }\lambda \mod 2\pi$
  ou $x = \pi - \text{Arcsin }\lambda \mod 2\pi$
- Si $\cos x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arccos }\lambda \mod 2\pi$
  ou $x = -\text{Arcsin }\lambda \mod 2\pi$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan }\lambda \mod \pi$
- Si $\text{cotan } x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot }\lambda \mod \pi$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin }\lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x	Arccot x
Ensemble de définition	$[-1\,;1]$	$[-1\,;1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2\,;\pi/2]$	$[0\,;\pi]$	$]-\pi/2\,;\pi/2[$	$]0\,;\pi[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$]-1\,;1[$	$]-1\,;1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

3 Relations

$$\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \pi/2$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\, \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arccot}\, x = \pi/2$$

$$\text{Arccot}\, x = \begin{cases} \text{Arctan}\, 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan}\, 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, 1/x = \text{sign}(x) \times \pi/2$$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan\dfrac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + \mathrm{i}\ \sin a)^n = \cos na + \mathrm{i}\ \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos^3 a - 3\cos a\ \sin^2 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3a &= 3\cos^2 a\ \sin a - \sin^3 a\\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a\end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

IV Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p + \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p + \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\ a + \mathrm{th}\ b}{1 + \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p + \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p+q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p - \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p - \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a-b) = \frac{\mathrm{th}\ a - \mathrm{th}\ b}{1 - \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p - \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p-q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\ 2x &= \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x\\ &= 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1\\ &= 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 x\end{aligned} \qquad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x + 1}{2}$$

$$\mathrm{sh}\ 2x = 2\,\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{ch}\ x \qquad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{2}$$

$$\mathrm{th}\ 2x = \frac{2\,\mathrm{th}\ x}{1 + \mathrm{th}^2 x} \qquad \mathrm{th}\ x = \frac{\mathrm{sh}\ 2x}{\mathrm{ch}\ 2x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{\mathrm{sh}\ 2x}$$

En notant $t = \text{th}\ \dfrac{x}{2}$, on a :

$$\text{sh}\ x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad\qquad \text{ch}\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\text{ch}\ a + \text{sh}\ a)^n = \text{ch}\ na + \text{sh}\ na$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{ch}\ 3a &= \text{ch}^3 a + 3\,\text{ch}\ a\,\text{sh}^2 a \\ &= 4\,\text{ch}^3 a - 3\,\text{ch}\ a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sh}\ 3a &= 3\,\text{ch}^2 a\,\text{sh}\ a + \text{sh}^3 a \\ &= 4\,\text{sh}^3 a + 3\,\text{sh}\ a \end{aligned}$$

$$\text{th}\ 3a = \frac{3\,\text{th}\ a + \text{th}^3 a}{1 + 3\,\text{th}^2 a}$$