Division par 11

Coërchon Colin

21 janvier 2025

Table des matières

1 Introduction

La division par 11 de certains entiers naturels semble donner des développements décimaux assez surprenants. Comme bon premier exemple, la division de 1 par 11 donne avec n'importe quelle calculatrice ce résultat : $0,0909090909090\ldots$

Mais, là où ça devient intéressant, c'est que le motif qui semblent se répéter dans toutes les divisions par 11 est de **longueur 2** !

Exemples :

- $\dfrac{2}{11} = 0,181818181818\ldots$
- $\dfrac{5}{11} = 0,454545454545\ldots$
- $\dfrac{14985}{11} = 1362,27272727\ldots$

Bon, évidemment, la répétition n'est pas très surprenante pour les multiples de 11 puisque ce n'est qu'une succession de zéros.

Bref, nous allons nous intéresser ici à l'explication des motifs de répétitions dans la division par 11. Et on évoquera à la fin le théorème plus général qui assure l'existence de périodicité dans le développement décimal pour tout rationnel.

On notera dorénavant : $0,1818181818\ldots = 0,\underline{18}$.

2 Première approche

Partons de l'exemple $\frac{2}{11} = 0,\underline{18}$. On peut premièrement remarquer que $18 = 2 \times 9$ (cette multiplication par 9 est présente dans tous les exemples).

On peut alors écrire en suivant notre intuition :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{11} &= \frac{18}{99} && \text{(multiplication par 9)} \\
&= \frac{18}{100} + \frac{18}{99 \times 100} \\
&= \frac{18}{100} + \frac{1}{100} \times \left(\frac{18}{100} + \frac{18}{99 \times 100}\right) \\
&= \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \frac{1}{10^4} \times \frac{18}{99} \\
&= \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^n} \times \frac{18}{99}
\end{aligned}$$

Cela donne une bonne première idée du phénomène qui se passe ici. Essayons maintenant de formaliser notre idée, puis de la prouver.

Théorème 2.1 : Développement décimal pour la division par 11

Pour tout entier naturel n, on pose respectivement N et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 11. On a alors le résultat suivant :

$$\frac{n}{11} = N + 9r \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{2k}}$$

Ce qui correspond en développement décimal :

$$\frac{n}{11} = N + \frac{9r}{100} + \frac{9r}{10000} + \frac{9r}{10^6} + \ldots = N, \underline{9r}$$

Démonstration.

- Premièrement, la série de terme général $\frac{1}{10^2}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{10^2}\right| < 1$. On peut alors calculer la somme de cette série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{2k}} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{100 - 1} = \frac{1}{99}$$

- Deuxièmement, par définition de N et r, on a :

$$\frac{n}{11} = \frac{11 \times N + r}{11} = N + \frac{r}{11} = N + 9r \times \frac{1}{99}$$

On en déduit donc le résultat final :

$$\boxed{\frac{n}{11} = N + 9r \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{2k}}}$$

□

Le théorème 2.1 donne ainsi une bonne aide pratique pour approximer rapidement la division par 11 d'un entier naturel.

3 Pour aller plus loin

Pour être transparent, on s'est ici un peu amusé à reconnaître le développement décimal particulier qu'offre la division par 11 des entiers naturels. Mais, il faut savoir que tout rationnel admet un développement décimal périodique. Et que dans notre exemple avec la division par 11, la période était de longueur 2.

On peut écrire le théorème de cette façon :

Théorème 3.1 : Développement décimal d'un rationnel

Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $b > 0$, de développement décimal $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$. Alors, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique, ce qui signifie qu'il existe $N \geq 1$ et $T \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad a_{n+T} = a_n.$$

De plus, les nombres décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement décimal est fini, i.e. $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow a_n = 0$.

Pour la preuve de ce résultat, celle de Wikipedia [1] est sympathique, mais j'ai trouvé un document qui résume bien les propriétés importantes [2]. (Ou avec encore plus de précision, notamment sur le lien avec le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$: [3]).

Références

[1] Wikipedia. Développement décimal périodique. https://fr.wikipedia.org/wiki/DÃľveloppement_dÃľcimal_pÃľriodique#DÃľveloppement_pÃľriodique_et_nombre_rationnel, 2023.

[2] Renaud Coulangeon. Nombres décimaux, développement décimal d'un rationnel. https://www.math.u-bordeaux.fr/~rcoulang/capes/0910/devt_decimal.pdf, 2009.

[3] Robert Rolland. Notes sur les développements décimaux périodiques. https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Rolland.pdf.