Exercices de maths - Oraux

Colin Coërchon, filière MP

2022

1 Exercices Mines-Télécom

Note reçue : **15/20**.

Assez bon ressenti. Quasiment aucun problème sur l'exercice 1. Plus de tâtonnement avec quelques difficultés à me rappeler des résultats simples sur les endomorphismes de rang 1 dans l'exercice 2.

Exercice 1.1 : Intégrale à paramètres

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer l'existence de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que F est solution de : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ (E)
4. Montrer que F est la **seule** solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

Démonstration.

1. On pose f définie de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   - En $+\infty$, comme $x > 0$, on en déduit que : $f(x,t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée. Par comparaison aux intégrales de Riemann, on en conclut que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

   La fonction F est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2.
   - $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
     Et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t\,e^{-tx}}{1+t^2} \quad$ et $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2}$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. (*d'après la question 1*)
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, pour les mêmes raisons que $t \mapsto f(x,t)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2} \leqslant t^2\,e^{-at} \quad (\text{car } 1+t^2 \geqslant 1)$.
  On pose alors : $\varphi : t \mapsto t^2\,e^{-at}$. Or φ est positive, indépendante de x, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Et en $+\infty$, $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc, par comparaisons aux intégrales de Riemann, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'hypothèse de domination est établie.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. La question précédente nous permet d'affirmer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} F''(x) + F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-tx}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (1+t^2)\frac{e^{-tx}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}\ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{x}\left[e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

F est donc solution de (E).

4. On s'intéresse premièrement à l'équation homogène : $y''+y=0$ (E_0).
C'est l'équation de l'oscillateur harmonique. Ces solutions sont donc de la forme : $y(x) = \lambda\cos x + \mu \sin x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On peut facilement réécrire ces solutions sous la forme $y(x) = \lambda\cos(x+\phi)$ avec $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$
Or, d'après la *question 3*, F est une solution particulière de (E). Donc, toutes les solutions de (E) sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \lambda\cos(x+\phi) + F(x) \qquad \text{avec } \lambda, \phi \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution y telle que $y \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrons dans un premier temps que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  Et φ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Hypothèse de domination : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$
  Or $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, indépendante de x, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann.

D'après le théorème de convergence dominée dans le cadre des intégrales à paramètres, on en déduit que :

$$F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Or, $\cos(x+\phi) \underset{+\infty}{\not\to} 0$. Donc : $\lambda \neq 0 \iff y \underset{+\infty}{\not\to} 0$. (par linéarité de la limite)
Finalement, F est l'unique solution de (E) de limite nulle en $+\infty$, correspondant au cas où $\lambda = 0$.

□

Exercice 1.2 : Algèbre linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie notée n. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$ avec $v \in E$

1. Déterminer le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

1. L'hypothèse $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$ avec $v \in E$ permet de remarquer que : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f(e_1 - e_k) = 0_E$. Comme e est une base de E, la famille $(e_1-e_2, e_1-e_3, \ldots, e_1-e_n)$ est libre. Et donc : $\dim \mathrm{Ker} f \geqslant n-1$.
Ainsi, si $v = 0_E$, on a $\mathrm{Vect}(e1) \subset \mathrm{Ker} f$ et donc $\dim \mathrm{Ker} f \geqslant n \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = n$.
Et, si $v \neq 0_E$, on a aussi évidement $v \in \mathrm{Im} f$, et donc $\dim \mathrm{Ker} f = n-1$ d'après le théorème du rang.
Par conséquent :
$$\mathrm{rg}\, f = \begin{cases} 0 & \text{si } v = 0_E \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. *Je propose ici une preuve par tâtonnement, commme j'ai procédé durant l'exercice. Avec quelques connaissances sur les endomorphismes de rang 1, cette question peut s'expédier beaucoup plus vite* :)

   - Premier cas : $v = 0_E$.
   Dans ce cas, la question précédente nous permet d'affirmer que $\dim \mathrm{Ker} f = n$. Donc f est l'endomorphisme nul, il est donc diagonalisable.
   - Second cas : $v \neq 0_E$.
   Comme $\dim \mathrm{Ker} f = n-1$, on note alors $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker} f$, et on complète cette base par un vecteur b_n tel que $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ forme une base de E.
   Ainsi, en notant A la matrice de l'endomorphisme f dans la base B, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
   Avec ce changement de base, on remarque que :
   $$A \text{ est diagonalisable} \iff \lambda_n \neq 0$$

Preuve du résultat :
Supposons que A soit diagonalisable. Elle admet au plus 2 valeurs propres : 0 et λ_n. Or A n'est pas nulle donc $\lambda_n \neq 0$.
Et si $\lambda_n \neq 0$, on a $\lambda_n \in \mathrm{Sp}(A)$ (puisque A est triangulaire supérieure) donc $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_n I_n) \geqslant 1$. Comme $\dim \mathrm{Ker} A = \dim \mathrm{Ker} f = n-1$, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_n I_n) = 1$. Par un argument de dimension, A est diagonalisable.

Ainsi, si $\lambda_n \neq 0$, A est similaire à la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Et par invariance de similitude de la trace, on en déduit le résultat suivant (valable pour toute matrice de rang 1) :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Tr}(A) \neq 0$$

Or, revenons à l'exercice, la question précédente nous permet d'affirmer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(v)$.
Et de plus, on montre facilement que : $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Tr}(f) = 0$. (Puisque cela implique que $f^2 = 0$, f est donc nilpotent et donc de trace nulle.)
Par conséquent, l'argument de diagonalisabilité de f se joue sur l'appartenance ou non de $f(v)$ dans le noyau de f. Donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \iff f(v) \neq 0_E}$$

En effet, f est diagonalisable $\Longrightarrow \mathrm{Tr}(f) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Im} f \not\subseteq \mathrm{Ker} f \Longrightarrow f(v) \neq 0$.
Et $f(v) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Im} f \not\subseteq \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = E$ car $\mathrm{Im} f$ est une droite vectorielle.
Or, comme $\mathrm{rg}\, f = 1$ et $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = E$, cela nous permet de conclure que f est diagonalisable, puisque E est somme directe des sous-espaces propres de f.

$\square$

2 Exercices CCINP

Note reçue : **13,01/20**.

Ressenti mitigé. Je n'avais pas du tout travaillé cet exercice de la banque (pas de chance, je n'en avais travaillé que ≈ 100), et je n'ai pas réussi à le terminer. Aucun problème et aucune remarque de l'examinateur sur l'exercice 2.

Exercice 2.1 : Exercice 71 de la banque CCINP 2022 (algèbre)

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 2.2 : Intégrale à paramètres

On pose : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer l'existence de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer F.

Démonstration.

1. On pose f définie de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f:(x,t)\longmapsto \dfrac{e^{-tx}\sin t}{t}$.
   - $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ t\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Étude en $+\infty$: $\forall (x,t)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad |f(x,t)|\leqslant \dfrac{e^{-tx}}{t}$.
     Et, comme $x>0$, $\dfrac{e^{-tx}}{t}\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée. Par comparaison aux intégrales de Riemann, on en conclut que la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   - Étude en 0^+ : $f(x,t)\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{\sin t}{t}$. Donc, $f(x,t)=1+\underset{t\to0^+}{o}(1)$.
     On en déduit que la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0. Donc, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$.

   Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. La fonction F est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. - $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ x\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
     Et $\forall (x,t)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-e^{-tx}\sin t$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. (*d'après la question 1*)
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-tx}|\sin t| \leqslant e^{-at}$

  On pose alors : $\varphi : t \mapsto e^{-at}$. Or φ est positive, indépendante de x, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Et en $+\infty$, $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (car $a > 0$).

  Donc, par comparaisons aux intégrales de Riemann, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'hypothèse de domination est établie.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. La question précédente nous permet d'affirmer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\ \mathrm{d}t$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin t\ \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\ \mathfrak{Im}(e^{it})\ \mathrm{d}t \\
&= -\mathfrak{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-x)}\ \mathrm{d}t\right) \\
&= -\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{i-x}\left[e^{t(i-x)}\right]_{t\to0}^{t\to+\infty}\right) \\
&= -\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) \\
\Rightarrow F'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que, sur $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) = C - \arctan(x)$.
Il reste donc à déterminer la valeur de la constante d'intégration C. Pour cela, déterminons la limite de F en $+\infty$. On restreint donc x dans $[1,+\infty[$.

- $\forall x \in [1,+\infty[,\ t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$-$\mathcal{PM}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}\sin t}{t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Hypothèse de domination : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [1,+\infty[, \quad \left|\dfrac{e^{-tx}\sin t}{t}\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t}$

  Or $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est positive, indépendante de x, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann (puisque $\dfrac{e^{-t}}{t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée).

D'après le théorème de convergence dominée dans le cadre des intégrales à paramètres, on en déduit que :

$$F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Or, $\arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit alors l'expression de F.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$$

$\square$