# TP1 – Computational Statistics

Coërchon Colin

1er novembre 2024

## Table des matières



## 1 Exercice 1

1. On considère les variables aléatoires $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$, où $R$ est une variable aléatoire suivant une loi de Rayleigh avec densité

$$f_R(r) = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(r),$$

et $\Theta$ est uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$. On suppose que $R$ et $\Theta$ sont indépendantes.

Nous souhaitons montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes et que chacune suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Pour ce faire, considérons une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée et mesurable. Nous calculons alors l'espérance $\mathbb{E}[g(X, Y)]$ :

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On applique alors le changement de variable $(x, y) \longmapsto (r, \theta)$ défini par l'inverse de la fonction $F$ :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

La matrice jacobienne associée est alors :

$$J_F(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $|J_F(r, \theta)| = r$.

On a donc :

$$f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f_{R,\Theta}(r,\theta) \times |J_F(r,\theta)|^{-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = f_{R,\Theta}(r,\theta) \times \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Or, $R$ et $\Theta$ sont indépendantes, donc la densité conjointe de $(R, \Theta)$ est donnée par :

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = f_R(r) \cdot f_\Theta(\theta) = r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Ainsi, l'espérance $\mathbb{E}[g(X, Y)]$ devient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X,Y)] &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot \frac{1}{2\pi} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Et donc, pour conclure (en sachant que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \, \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)}_{f_X(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)}_{f_Y(y)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure que $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0_2, I_2)$, et donc :

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(0,1)\,, \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et} \quad X \perp\!\!\!\perp Y}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad F_R(r) &= \mathbb{P}(R \leq r) \\ &= \int_0^r x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^r = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Or, $F_R$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la méthode de la transformée inverse nous donne alors :

$$\text{Si } U \sim \mathcal{U}([0,1]), \quad \text{alors } F_R^{-1}(U) \sim R$$

Or,

$$\forall u \in [0,1], \quad F_R^{-1}(u) = \sqrt{-2\ln(1-u)}\,.$$

Et on sait que $1 - U \sim \mathcal{U}([0,1]) \iff U \sim \mathcal{U}([0,1])$, donc on peut prendre $\sqrt{-2\ln(u)}$.

De plus, si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $2\pi U \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$.

Ainsi, on peut en déduire un algorithme pour simuler indépendamment des variables $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cet algorithme s'appelle l'**algorithme de Box-Muller**.

3. (a) À la fin de la boucle "while", comme $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ et que $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$, on en déduit que :

$$\boxed{(V_1, V_2) \sim \mathcal{U}(D)}$$

avec $D$ le disque unité sur $\mathbb{R}^2$ défini par $D \triangleq \{(x,y) \in [-1,1]^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**Algorithm 1** Algorithme de Box-Muller

1: Générer deux variables aléatoires indépendantes $U_1$ et $U_2$ uniformément distribuées sur $[0,1]$.

2: Calculer :

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$
$$Z_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

3: Retourner $Z_1$ et $Z_2$, qui sont des variables indépendantes suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(b) On note $Y$ la variable aléatoire qui donne le nombre de tour dans la boucle "while" avant d'en sortir. On peut apparenter les tours dans la boucle "while" comme des **épreuves de Bernoulli** indépendantes et le fait d'en sortir comme le succès de probabilité $p \in ]0,1[$.
Ainsi, $Y$ suit une loi géométrique de paramètre $p$, où $p = \mathbb{P}(V_1^2 + V_2^2 \leq 1)$. Comme $V_1, V_2 \sim \mathcal{U}([-1,1])$, la probabilité $p$ peut se calculer très simplement :

$$p = \mathbb{P}(V_1^2 + V_2^2 \leq 1) = \frac{\text{aire}(D)}{\text{aire}([0,1]^2)} = \frac{\pi}{4}$$

Donc, $\boxed{Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.
Ainsi, on a facilement :

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p} = \frac{4}{\pi}}$$

C'est-à-dire qu'il y a en moyenne de $\frac{\pi}{4} \approx 1.27$ tours dans la boucle "while".

(c) On pose :

$$T_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \quad \text{et} \quad V = V_1^2 + V_2^2.$$

**1. Distribution de $V$ en utilisant la méthode de la fonction muette**
Pour obtenir la distribution de $V = V_1^2 + V_2^2$, considérons une fonction $g$ bornée et mesurable, et calculons $\mathbb{E}[g(V)]$.
L'espérance de $g(V)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}[g(V)] = \iint_D g(V_1^2 + V_2^2)\, f_{V_1,V_2}(v_1, v_2)\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2,$$

où $f_{V_1,V_2}(v_1,v_2) = \frac{1}{\pi}$ car $(V_1, V_2) \sim \mathcal{U}(D)$, avec une densité uniforme de $\frac{1}{\pi}$ sur le disque unité.
Passons en coordonnées polaires $(r,\theta)$ avec $r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ et $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$, où $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Le jacobien de cette transformation est $r$, donc :

$$\mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 = r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

L'espérance devient alors :

$$\mathbb{E}[g(V)] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 g(r^2) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

Intégrons par rapport à $\theta$, en notant que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}\theta = 1$, et simplifions :

$$\mathbb{E}[g(V)] = \int_0^1 g(r^2) \cdot 2r\,\mathrm{d}r$$

En posant $u = r^2$, de sorte que $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$, on obtient :

$$\mathbb{E}[g(V)] = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u$$

Cela montre que $V = V_1^2 + V_2^2$ suit une distribution uniforme sur $[0,1]$, car l'espérance de $g(V)$ est identique à celle d'une variable uniforme.
Donc :

$$\boxed{V \sim \mathcal{U}([0,1])}$$

**2. Distribution de $T_1$ en utilisant la méthode de la fonction muette**
Pour la distribution de $T_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}$, nous appliquons aussi la méthode de la fonction muette. Remarquons que $T_1$ est en fait le cosinus de l'angle $\Theta$ que fait le vecteur $(V_1, V_2)$ avec l'axe $V_1$.
Soit une fonction $h$ bornée et mesurable, nous voulons calculer $\mathbb{E}[h(T_1)]$.
Nous avons :

$$\mathbb{E}[h(T_1)] = \iint_D h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right) f_{V_1,V_2}(v_1,v_2)\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2$$

En passant en coordonnées polaires $(r,\theta)$ avec $v_1 = r\cos(\theta)$ et $v_2 = r\sin(\theta)$, et en utilisant le jacobien $r$, on obtient :

$$\mathbb{E}[h(T_1)] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 h(\cos\theta) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

En intégrant par rapport à $r$, on trouve :

$$\mathbb{E}[h(T_1)] = \int_0^{2\pi} h(\cos\theta) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} h(\cos\theta) \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$$

Cette intégrale est l'espérance de $h(\cos(\Theta))$ où $\Theta$ est uniformément distribué sur $[0,2\pi]$. Cela montre que $T_1 = \cos(\Theta)$ avec $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$, et donc :

$$\boxed{T_1 \sim \cos(\Theta) \text{ avec } \Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])}$$

**3. Indépendance de $T_1$ et $V$**
Pour démontrer que $V$ et $T_1$ sont indépendantes, nous allons analyser leurs expressions en coordonnées polaires.
Nous avons que $(V_1, V_2)$ est uniformément distribué dans le disque unité $D \subset \mathbb{R}^2$.
En passant en coordonnées polaires, posons :

$$r = \sqrt{V_1^2+V_2^2} \quad \text{et} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

de sorte que $V_1 = r\cos(\theta)$ et $V_2 = r\sin(\theta)$.

Nous pouvons alors exprimer $T_1$ et $V$ en fonction de $r$ et $\theta$ :

$$T_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \cos(\theta)$$

$$V = V_1^2 + V_2^2 = r^2$$

Ainsi :

- $T_1 = \cos(\theta)$ dépend uniquement de l'angle $\theta$.
- $V = r^2$ dépend uniquement de la norme $r$.

Comme $r$ et $\theta$ sont indépendants dans une distribution uniforme sur le disque, il en résulte que :

$$\boxed{T_1 \text{ et } V \text{ sont également indépendantes.}}$$

(d) On avait vu dans la question 2 que :

$$\text{Si } U \sim \mathcal{U}([0,1]), \quad \text{alors } \sqrt{-2\ln(U)} \sim \mathcal{R}(1)$$

où $\mathcal{R}(1)$ symbolise la loi de Rayleigh de paramètre 1.
Comme $V = V_1^2 + V_2^2 \sim \mathcal{U}([0,1])$, on en déduit que :

$$\boxed{S = \sqrt{-2\ln(V_1^2 + V_2^2)} \sim \mathcal{R}(1)}$$

De plus, avec $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$, on sait d'après la question précédente que :

$$\boxed{T_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \sim \cos(\Theta) \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \sim \sin(\Theta)}$$

en reprenant les calculs pour $T_2$ par analogie avec $T_1$.

Ainsi, comme $X = S\,T_1$ et $Y = S\,T_2$, par analogie avec la question 2, on en déduit très simplement que :

$$\boxed{(X, Y) \sim \mathcal{N}(0_2, I_2)}$$

# 2 Exercice 2

1. Pour prouver que le noyau de transition $P(x, A)$ est bien celui de la chaîne de Markov définie dans l'énoncé, nous devons vérifier trois conditions.

   On doit effectivement vérifier $\forall A \in \mathcal{B}([0,1])$ :

   - $x \longmapsto P(x, A)$ est mesurable.
   - $\forall x, P(x, .)$ est une mesure de probabilité.
   - $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) = P(x, A)$

   On rappelle que le noyau de transition $P(x, A)$ est donné par :

$$P(x, A) = \begin{cases} x^2 \displaystyle\int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}t + (1 - x^2)\delta_{\frac{1}{k+1}}(A) & \text{si } x = \frac{1}{k} \\ \displaystyle\int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}t & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\delta_\alpha$ est la mesure de Dirac en $\alpha$.

**Étape 1 : Vérification de la mesurabilité de $x \mapsto P(x, A)$**

Pour montrer que $x \mapsto P(x, A)$ est une fonction mesurable pour tout borélien $A \subset [0, 1]$, observons que $P(x, A)$ est défini différemment selon que $x = \frac{1}{k}$ pour un entier $k$ ou non.

- Si $x = \frac{1}{k}$, alors $P(x, A) = x^2 \int_{A \cap [0,1]} \mathrm{d}t + (1 - x^2)\delta_{\frac{1}{k+1}}(A)$. Cette expression est une combinaison linéaire d'une intégrale et d'une masse de Dirac. Elle est donc mesurable en $x$ car elle est constituée de fonctions continues et de fonctions indicatrices.
- Si $x \neq \frac{1}{k}$ pour tout entier $k$, alors $P(x, A) = \int_{A \cap [0,1]} \mathrm{d}t$, ce qui est constant par rapport à $x$ et donc mesurable.

**Étape 2 : Vérification que $P(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité**

- **Cas où $x = \frac{1}{k}$** : Dans ce cas, on a
$$P(x, [0, 1]) = x^2 \int_{[0,1]} \mathrm{d}t + (1 - x^2)\delta_{\frac{1}{k+1}}([0, 1]).$$
En évaluant chaque terme :
  - $x^2 \int_{[0,1]} \mathrm{d}t = x^2 \times 1 = x^2$,
  - $\delta_{\frac{1}{k+1}}([0, 1]) = 1$, donc $(1 - x^2)\delta_{\frac{1}{k+1}}([0, 1]) = 1 - x^2$.

  Par conséquent,
$$P(x, [0, 1]) = x^2 + (1 - x^2) = 1.$$
Cela montre que $P(x, \cdot)$ est bien **une mesure de probabilité** lorsque $x = \frac{1}{k}$.
- **Cas où $x \neq \frac{1}{k}$ pour tout entier $k$** : Dans ce cas, $P(x, A) = \int_{A \cap [0,1]} \mathrm{d}t$, ce qui correspond à la mesure uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi,
$$P(x, [0, 1]) = \int_{[0,1]} \mathrm{d}t = 1.$$
Par conséquent, $P(x, \cdot)$ est également une mesure de probabilité lorsque $x \neq \frac{1}{k}$.

Nous avons donc vérifié que $P(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité pour chaque $x \in [0, 1]$.

**Étape 3 : Calcul de $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x)$**

Pour prouver que $P(x, A)$ est le noyau de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$, nous devons montrer que la probabilité de transition $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x)$ est égale à $P(x, A)$.

- **Cas où $x = \frac{1}{k}$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$** : Dans ce cas, la transition est définie par deux événements possibles :
  - Avec probabilité $1 - x^2 = 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2$, $X_{n+1} = \frac{1}{k+1}$.
  - Avec probabilité $x^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2$, $X_{n+1} \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

  Donc, pour tout borélien $A \subset [0, 1]$, nous avons :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) &= \left(\frac{1}{k}\right)^2 \int_{A \cap [0,1]} \mathrm{d}t + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \int_{A \cap [0,1]} \mathbb{1}_{\left\{\frac{1}{k+1}\right\}}(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{1}{k}\right)^2 \int_{A \cap [0,1]} \mathrm{d}t + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \delta_{\frac{1}{k+1}}(A)\end{aligned}$$
Cette expression correspond bien à la formule donnée pour $P(x, A)$ dans le cas où $x = \frac{1}{k}$.

- **Cas où** $x \neq \frac{1}{k}$ : Dans ce cas, $X_{n+1} \sim \mathcal{U}([0,1])$, donc :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) = \int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}t.$$

Cette expression correspond bien à la formule donnée pour $P(x, A)$ lorsque $x \neq \frac{1}{k}$.

Ainsi, nous avons vérifié que $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) = P(x, A)$ pour tout borélien $A \subset [0, 1]$.

## Conclusion

$\boxed{P(x, A) \text{ est bien le noyau de transition de la chaîne de Markov définie dans l'exercice.}}$

2. L'objectif est de montrer que :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{B}([0,1]), \quad (\pi P)(A) = \pi(A)}$$

En notant $p$ la densité de $\pi$, qui est la distribution uniforme sur $[0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned}
(\pi P)(A) &= \int_{\mathbb{R}} p(A)P(x,A)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 P(x,A)\,\mathrm{d}x && \text{(car } \pi \text{ est uniforme de densité } p(x) = 1) \\
&= \int_0^1 P(x,A)\,\mathbb{1}_Q(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 P(x,A)\,\mathbb{1}_{\overline{Q}}(x)\,\mathrm{d}x && \text{(avec } Q = \left(\{\tfrac{1}{n}\}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}) \\
&= \int_0^1 P(x,A)\,\mathbb{1}_{\overline{Q}}(x)\,\mathrm{d}x && \text{(car la mesure d'un point } \tfrac{1}{n} \text{ est nulle)} \\
&= \int_0^1 \int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x && \text{(par def du noyau de transition } P) \\
&= \int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} p(A)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi(A)
\end{aligned}$$

□

3. Dans la question 2, nous avons prouvé que :

$$\forall A \in \mathcal{B}([0,1]), \quad (\pi P)(A) = \pi(A),$$

où $\pi$ est la mesure uniforme sur $[0, 1]$, de densité $p(x) = 1$ sur cet intervalle.

## Calcul de $Pf(x)$

Pour $x \notin Q = \left\{\frac{1}{k},\, k \in \mathbb{N}^*\right\}$, d'après la définition du noyau de transition $P(x, A) = \int_{A\cap[0,1]} \mathrm{d}t$, la variable $X_1$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendamment de $X_0 = x$. Par conséquent, pour une fonction mesurable bornée $f$, on a :

$$Pf(x) = \mathbb{E}[f(X_1) \mid X_0 = x] = \int_{[0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

## Calcul de $P^n f(x)$ pour $n \geq 1$

Puisque $Pf(x) = \int_{[0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \notin Q$, nous constatons que la chaîne de Markov se « mélange » immédiatement sur $[0,1]$ pour ces valeurs de $x$. En d'autres termes, appliquer $P$ plusieurs fois ne change pas le fait que $X_n$ est uniformément distribué sur $[0,1]$ dès $n = 1$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$\boxed{P^n f(x) = \int_{[0,1]} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

## Calcul de $\lim\limits_{n\to\infty} P^n f(x)$

La limite $\lim_{n\to\infty} P^n f(x)$ correspond à l'espérance de $f$ par rapport à la mesure invariante $\pi$. Puisque $\pi$ est la loi uniforme sur $[0,1]$, nous avons :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P^n f(x) = \int_{[0,1]} f(x)\pi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

4. (a)

   (b)