Assignment 3 (ML for TS) - MVA

Colin Coërchon colin180302@gmail.com
Chloé Habasque habasquechloe29@gmail.com

30 Décembre 2024

1 Introduction

Objective. The goal is to implement (i) a signal processing pipeline with a change-point detection method and (ii) wavelets for graph signals.

Warning and advice.

- Use code from the tutorials as well as from other sources. Do not code yourself well-known procedures (e.g. cross validation or k-means), use an existing implementation.
- The associated notebook contains some hints and several helper functions.
- Be concise. Answers are not expected to be longer than a few sentences (omitting calculations).

Instructions.

- Fill in your names and emails at the top of the document.
- Hand in one report per pair of students.
- Rename your report and notebook as follows:
  `FirstnameLastname1_FirstnameLastname1.pdf` and
  `FirstnameLastname2_FirstnameLastname2.ipynb`.
  For instance, `LaurentOudre_CharlesTruong.pdf`.
- Upload your report (PDF file) and notebook (IPYNB file) using the link given in the email.

2 Dual-tone multi-frequency signaling (DTMF)

Dual-tone multi-frequency signaling is a procedure to encode symbols using an audio signal. The possible symbols are 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *, #, A, B, C, and D. A symbol is represented by a sum of cosine waves: for $t = 0, 1, \ldots, T-1$,

$$y_t = \cos(2\pi f_1 t / f_s) + \cos(2\pi f_2 t / f_s)$$

where each combination of (f_1, f_2) represents a symbols. The first frequency has four different levels (low frequencies), and the second frequency has four other levels (high frequencies); there are 16 possible combinations. In the notebook, you can find an example symbol sequence encoded with sound and corrupted by noise (white noise and a distorted sound).

Question 1

Design a procedure that takes a sound signal as input and outputs the sequence of symbols. To that end, you can use the provided training set. The signals have a varying number of symbols with a varying duration. There is a brief silence between each symbol.

Describe in 5 to 10 lines your methodology and the calibration procedure (give the hyperparameter values). Hint: use the time-frequency representation of the signals, apply a change-point detection algorithm to find the starts and ends of the symbols and silences, and then classify each segment.

Answer 1

Pour détecter les symboles dans ces signaux très bruités, voici notre méthodologie :

1. Nous découpons d'abord chaque signal avec un filtre passe-bande (600–1700 Hz) pour atténuer le bruit hors bande.
2. Nous calculons ensuite la STFT (fenêtre de taille 2048, 75% de recouvrement) et résumons chaque fenêtre par son énergie (somme des carrés).
3. Nous appliquons un algorithme de détection de ruptures (modèle "l2", pénalité 0.01, *min_size* = 6) pour localiser automatiquement les transitions entre silences et symboles.
4. Chaque segment est alors analysé en fréquence : nous repérons les deux pics dominants et les associons aux fréquences basses/hautes DTMF (697–941 Hz et 1209–1633 Hz).
5. Enfin, nous utilisons un seuil de ± 10 Hz pour gérer de légères déviations et mappons les paires de fréquences aux 16 symboles (0–9, *, #, A–D).
6. Nous avons optimisé ces hyperparamètres (pénalité, *min_size*, etc.) via une *grid search* sur l'ensemble d'entraînement et obtenu les meilleurs résultats en filtrant le signal et en prenant "square" comme mesure d'énergie.

La figure ci-dessous illustre, pour 2 signaux aléatoires de l'ensemble d'entraînement, la détection automatique des segments (énergie et ruptures) et la séquence de symboles reconstruits.

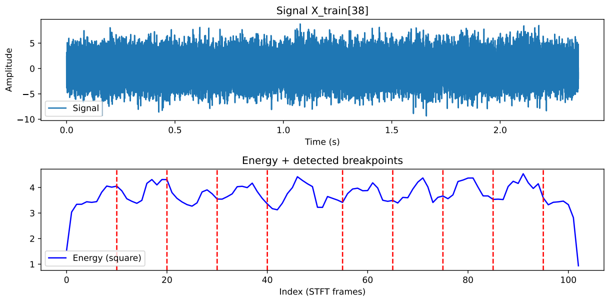


Figure 1: Signal X_train[38]

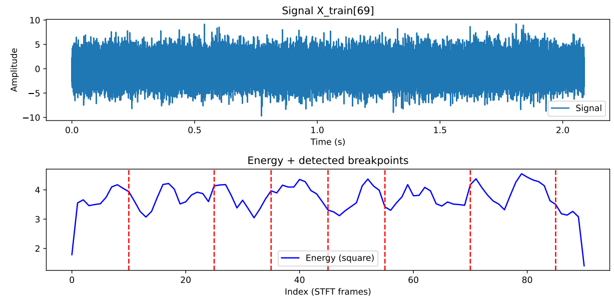


Figure 2: Signal X_train[69]

Figure 3: Résultats de détection pour deux signaux.

Signal X_train[38]:
True symbols: [’1’, ’6’, ’4’, ’1’, ’D’, ’*’, ’8’, ’0’, ’6’]
Pred symbols: [’1’, ’6’, ’4’, ’1’, ’D’, ’*’, ’1’, ’0’, ’6’]

Signal X_train[69]:
True symbols: [’7’, ’2’, ’2’, ’3’, ’3’, ’8’, ’2’, ’D’]
Pred symbols: [’7’, ’2’, ’2’, ’3’, ’3’, ’8’, ’D’]

Question 2

What are the two symbolic sequences encoded in the test set?

Answer 2

Les résultats de notre décodeur DTMF avec les hyperparamètres optimisés sont présentés ci-dessous pour deux signaux de test.

- **Sequence 1:**
  - **Vrai signal :** [’7’, ’2’, ’1’, ’C’, ’9’, ’9’]
  - **Prédiction :** [’7’, ’2’, ’1’, ’9’]
  - **Analyse :** Le modèle a correctement détecté les premiers symboles ’7’, ’2’, et ’1’. Cependant, il n’a pas détecté le symbole ’C’ et a mal interprété les deux derniers symboles ’9’.
- **Sequence 2:**
  - **Vrai signal :** [’1’, ’#’, ’2’, ’#’]
  - **Prédiction :** [’1’, ’#’, ’2’, ’#’]
  - **Analyse :** Pour cette séquence, le modèle a réussi à détecter correctement tous les symboles.

Conclusion : Les résultats montrent que, bien que les hyperparamètres optimisés permettent une détection correcte pour certains signaux (comme pour la séquence 2), ils peuvent être insuffisants pour gérer des cas davantage bruités (comme pour la séquence 1).

Il nous faudrait plus de temps pour essayer encore de nouvelles idées et méthodes dans l'objectif de correctement détecter les symboles dans ces signaux tant bruités.

3 Wavelet transform for graph signals

Let G be a graph defined a set of n nodes V and a set of edges E. A specific node is denoted by v and a specific edge, by e. The eigenvalues and eigenvectors of the graph Laplacian L are $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ and $u_1, u_2, \ldots, u_n$ respectively.

For a signal $f \in \mathbb{R}^n$, the Graph Wavelet Transform (GWT) of f is $W_f : \{1, \ldots, M\} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$W_f(m, v) := \sum_{l=1}^{n} \hat{g}_m(\lambda_l) \hat{f}_l u_l(v) \tag{1}$$

where $\hat{f} = [\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n]$ is the Fourier transform of f and $\hat{g}_m$ are M kernel functions. The number M of scales is a user-defined parameter and is set to $M := 9$ in the following. Several designs are available for the $\hat{g}_m$; here, we use the Spectrum Adapted Graph Wavelets (SAGW). Formally, each kernel $\hat{g}_m$ is such that

$$\hat{g}_m(\lambda) := \hat{g}^U(\lambda - am) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_n) \tag{2}$$

where $a := \lambda_n / (M + 1 - R)$,

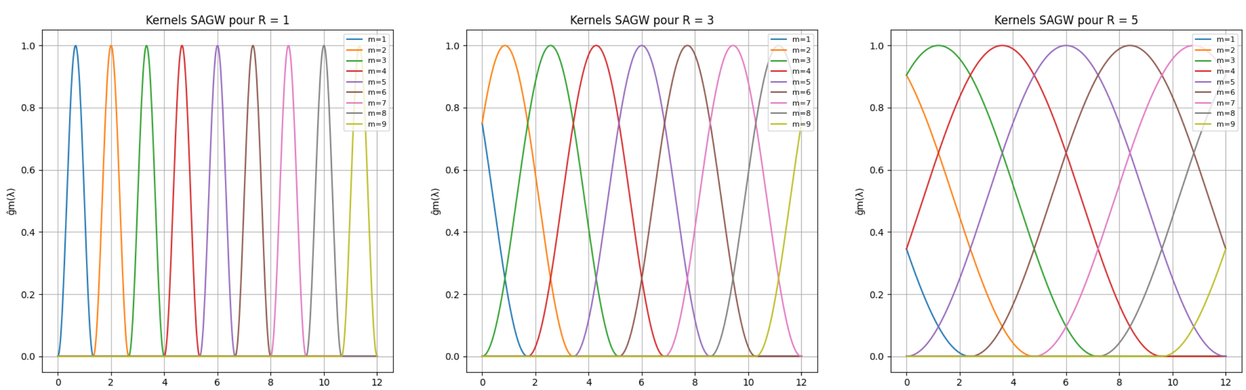
$$\hat{g}^U(\lambda) := \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi\left(\frac{\lambda}{aR} + \frac{1}{2}\right)\right)\right] \mathbb{1}(-Ra \leq \lambda < 0) \tag{3}$$

and $R > 0$ is defined by the user.

Question 3

Plot the kernel functions $\hat{g}_m$ for $R = 1$, $R = 3$ and $R = 5$ (take $\lambda_n = 12$) on Figure 4. What is the influence of R?

Answer 3



(a) $R = 1$ (b) $R = 3$ (c) $R = 5$

Figure 4: The SAGW kernels functions

Plus R est grand, Plus les oscillations sont larges.

We will study the Molene data set (the one we used in the last tutorial). The signal is the temperature.

Question 4

Construct the graph using the distance matrix and exponential smoothing (use the median heuristics for the bandwidth parameter).

- Remove all stations with missing values in the temperature.
- Choose the minimum threshold so that the network is connected and the average degree is at least 3.
- What is the time where the signal is the least smooth?
- What is the time where the signal is the smoothest?

Answer 4

Les stations avec des valeurs manquantes sont : ['ARZAL', 'BREST-GUIPAVAS', 'BRIGNOGAN', 'LANDIVISIAU', 'LANNAERO', 'LANVEOC', 'OUESSANT-STIFF', 'PLOUDALMEZEAU', 'QUIMPER', 'SIZUN', 'ST NAZAIRE-MONTOIR']. Il y en a 11.

On passe donc de 43 à 32 stations dans notre dataset.

Le seuil est égal à 0,73. A 0,83, le graph à une moyenne de 3 arrêtes par noeud mais le graphe n'est pas connecté.

Le signal est le 'least smooth' le **2014-01-21 05:00:00**.

Le signal est le 'smoothest' le **2014-01-25 00:00:00**.

Question 5

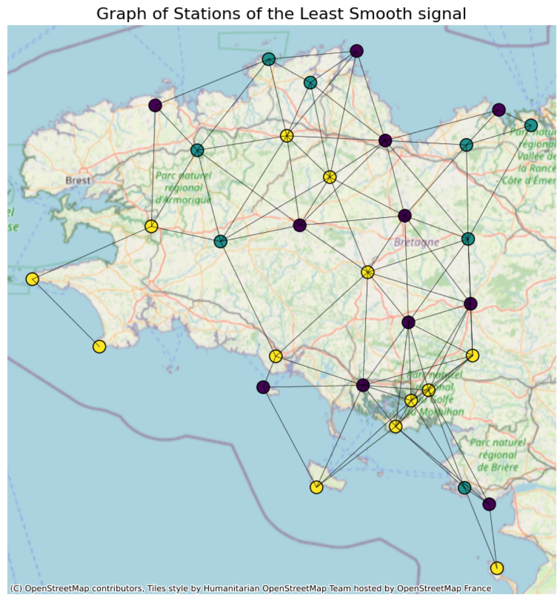
(For the remainder, set $R = 3$ for all wavelet transforms.)

For each node v, the vector $[W_f(1, v), W_f(2, v), \ldots, W_f(M, v)]$ can be used as a vector of features. We can for instance classify nodes into low/medium/high frequency:

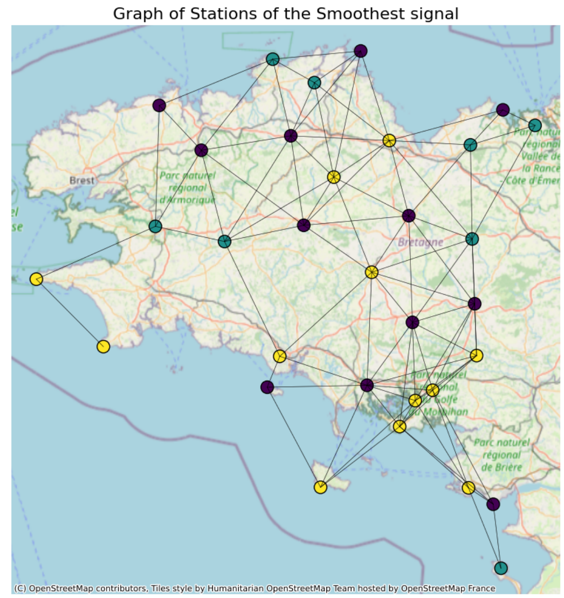
- a node is considered low frequency if the scales $m \in \{1, 2, 3\}$ contain most of the energy,
- a node is considered medium frequency if the scales $m \in \{4, 5, 6\}$ contain most of the energy,
- a node is considered high frequency if the scales $m \in \{6, 7, 9\}$ contain most of the energy.

For both signals from the previous question (smoothest and least smooth) as well as the first available timestamp, apply this procedure and display on the map the result (one colour per class).

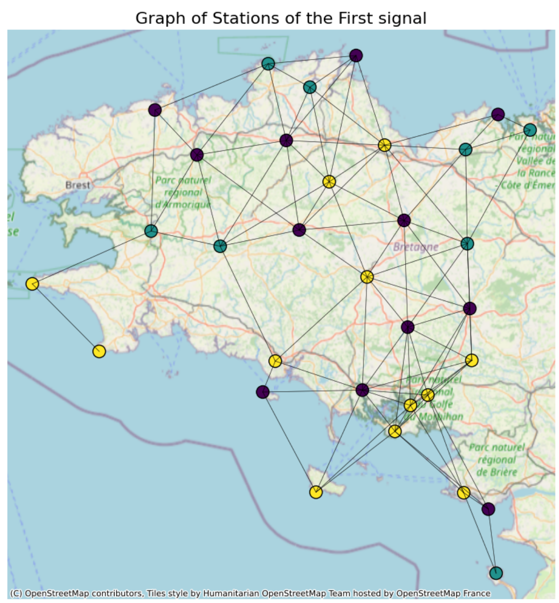
Answer 5



(a) Least smooth signal



(b) Smoothest signal



(c) First available timestamp

Figure 5: Classification of nodes into low/medium/high frequency

Bleu = low frequency, Vert = medium frequency , Jaune = high frequency.

Question 6

Display the average temperature and for each timestamp, adapt the marker colour to the majority class present in the graph (see notebook for more details).

Answer 6

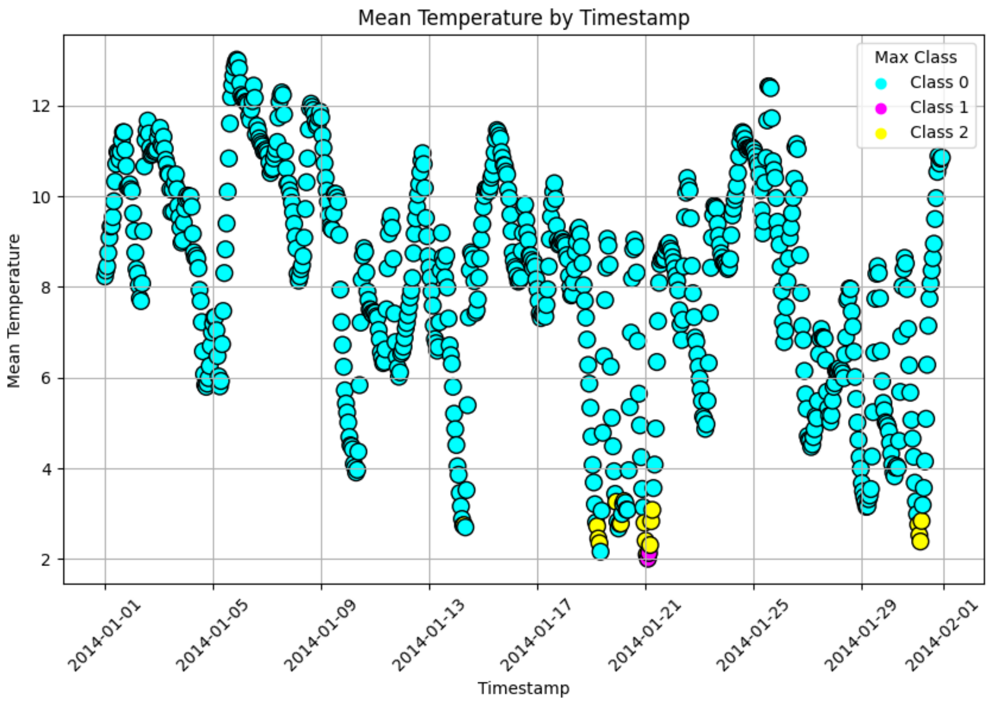


Figure 6: Average temperature. Markers' colours depend on the majority class.

On observe que la classe la plus présente est la classe 0, c'est à dire low frequency.

Question 7

The previous graph G only uses spatial information. To take into account the temporal dynamic, we construct a larger graph H as follows: a node is now *a station at a particular time* and is connected to neighbouring stations (with respect to G) and to itself at the previous timestamp and the following timestamp. Notice that the new spatio-temporal graph H is the Cartesian product of the spatial graph G and the temporal graph G' (which is simply a line graph, without loop).

- Express the Laplacian of H using the Laplacian of G and G' (use Kronecker products).
- Express the eigenvalues and eigenvectors of the Laplacian of H using the eigenvalues and eigenvectors of the Laplacian of G and G'.
- Compute the wavelet transform of the temperature signal.
- Classify nodes into low/medium/high frequency and display the same figure as in the previous question.

Answer 7

Expression du Laplacien de H à partir de ceux de G et G'

Soient :

- G un graphe spatial à N nœuds, de Laplacien $L_G \in \mathbb{R}^{N\times N}$.
- G' un graphe temporel à T nœuds, de Laplacien $L_{G'} \in \mathbb{R}^{T\times T}$.

Le graphe spatio-temporel H est le *produit cartésien* de G et G', et contient $N \times T$ nœuds. Le Laplacien de H, noté L_H, se décompose grâce au *produit de Kronecker* :

$$L_H \;=\; L_G \otimes I_T \;+\; I_N \otimes L_{G'}\,,$$

où

$$I_N \text{ et } I_T \quad \text{sont les matrices identité de taille respectivement } N \times N \text{ et } T \times T.$$

2) Valeurs propres et vecteurs propres de L_H

Soient :

$$\lambda_i \quad (i = 1,\dots,N) \quad \text{les valeurs propres de } L_G, \qquad \mathbf{u}_i \quad \text{les vecteurs propres associés,}$$

et

$$\mu_j \quad (j = 1,\dots,T) \quad \text{les valeurs propres de } L_{G'}, \qquad \mathbf{v}_j \quad \text{les vecteurs propres associés.}$$

Alors, pour le Laplacien L_H du graphe produit cartésien H, on obtient :

- **Valeurs propres :**
$$\lambda_i + \mu_j \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,N \quad \text{et} \quad j = 1,\dots,T.$$
- **Vecteurs propres :**
$$\mathbf{u}_i \,\otimes\, \mathbf{v}_j,$$
c'est-à-dire le *produit de Kronecker* des vecteurs propres de L_G et de ceux de $L_{G'}$.

Démonstration

On suppose que

$$L_G \, \mathbf{u}_i = \lambda_i \, \mathbf{u}_i \quad (i = 1, \dots, N), \qquad L_{G'} \, \mathbf{v}_j = \mu_j \, \mathbf{v}_j \quad (j = 1, \dots, T),$$

Action de L_H sur $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$

Pour deux matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, ainsi que des vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, on a la propriété du produit de Kronecker :

$$(A \otimes B) \, (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \;=\; (A \, \mathbf{x}) \;\otimes\; (B \, \mathbf{y}).$$

Appliquons cette propriété à chacune des deux composantes de L_H :

- **Partie spatiale** :

$$(L_G \otimes I_T) \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) \;=\; (L_G \, \mathbf{u}_i) \;\otimes\; (I_T \, \mathbf{v}_j) \;=\; \lambda_i \, \mathbf{u}_i \;\otimes\; \mathbf{v}_j.$$

- **Partie temporelle** :

$$(I_N \otimes L_{G'}) \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) \;=\; (I_N \, \mathbf{u}_i) \;\otimes\; (L_{G'} \, \mathbf{v}_j) \;=\; \mathbf{u}_i \;\otimes\; \mu_j \, \mathbf{v}_j \;=\; \mu_j \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j).$$

En sommant les deux contributions, on obtient :

$$L_H \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) \;=\; \big[(L_G \otimes I_T) + (I_N \otimes L_{G'})\big] (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) \;=\; \lambda_i \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) \;+\; \mu_j \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j) \;=\; (\lambda_i + \mu_j) \, (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j).$$

On voit alors que $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ est un vecteur propre de L_H associé à la valeur propre $\lambda_i + \mu_j$.

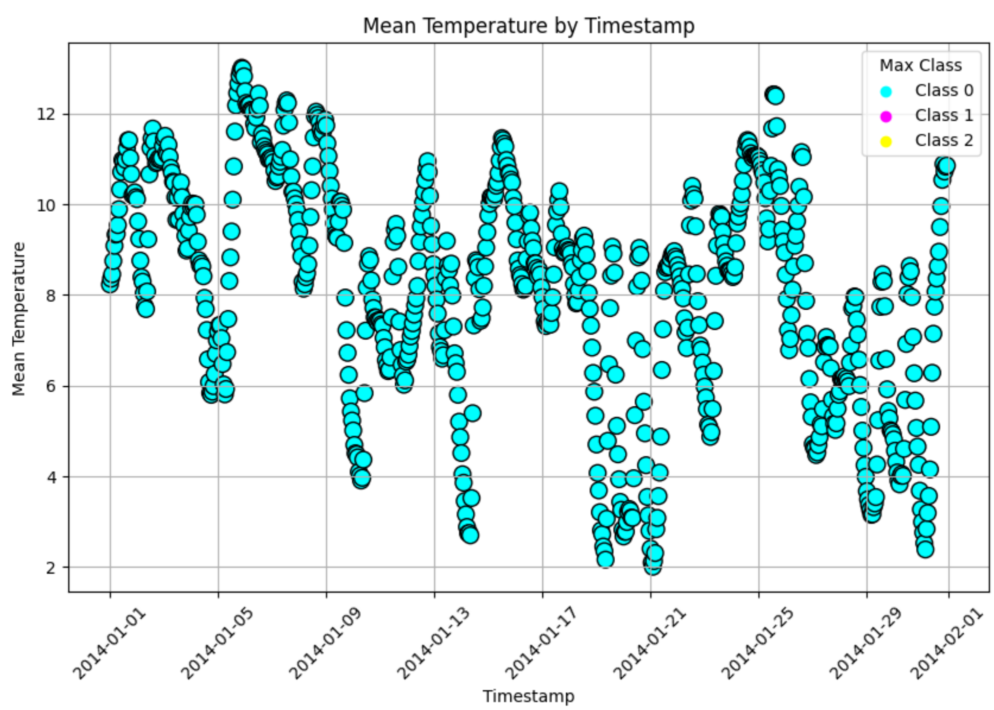


Figure 7: Average temperature. Markers' colours depend on the majority class.