

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
D'INFORMATIQUE POUR L'INDUSTRIE ET L'ENTREPRISE
ENSIIE

MM. les candidats sont invités

1° A inscrire bien lisiblement leur nom dans le cadre ci-contre ;

2° A ne pas signer la copie et ne pas s'y faire connaître d'une manière quelconque.

La non observation de l'une de ces prescriptions peut faire attribuer à leur composition la note zéro.

NOM PATRONYMIQUE COÛRCHON
NOM D'USAGE
ex : nom marital
PRÉNOM Colin
N° DE CARTE

RÉSERVÉ AU CORRECTEUR

N° 0054982

Note _____

EXAMEN DE Licence Maths

Du 12/05 20 23

NE RIEN ÉCRIRE DANS LA MARGE

Exercice 1 :

On pose, $V(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \left(\frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} ; x \sin(x+y) \right)$$

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que : $F(x, y) = (x, y)$

$$\text{soit } \begin{cases} x = \frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} \\ y = x \sin(x+y) \end{cases}$$

On a, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y^2 \in \mathbb{R}_+$, donc $e^{-y^2} \in]0; 1]$

$$\text{Donc : } |x| = \frac{1}{8} |\cos(x) + e^{-y^2}| \leq \frac{1}{8} (1 + 1) \leq \frac{1}{4}$$

↑
inégalité
triangulaire

$$\text{Donc } x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$$

$$\text{et donc, } |y| = |x \sin(x+y)| \leq |x| \leq \frac{1}{4}$$

RABATTRE

A

PARTIE

Ne rien inscrire dans

la partie barrée

Donc, on a également: $y \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$

Ainsi, si $F(x, y) = (x, y)$, alors $(x, y) \in K^2$

2) Soit $(x, y) \in K$, montrer que: $F(x, y) \in K$

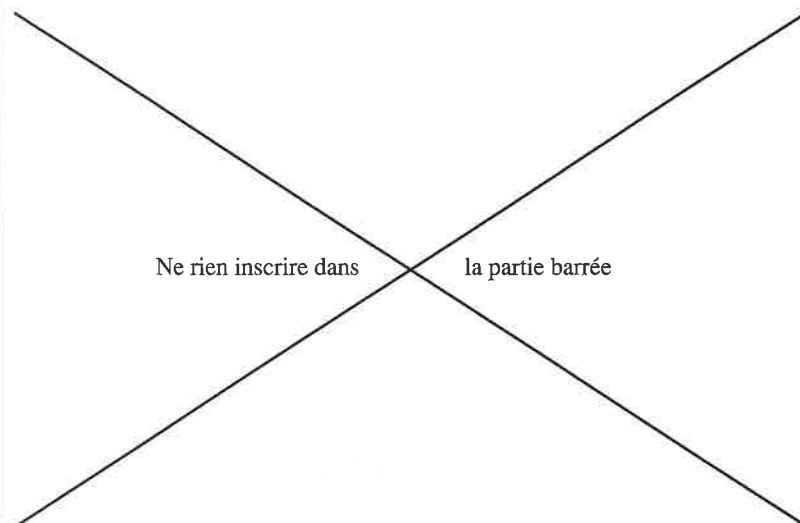
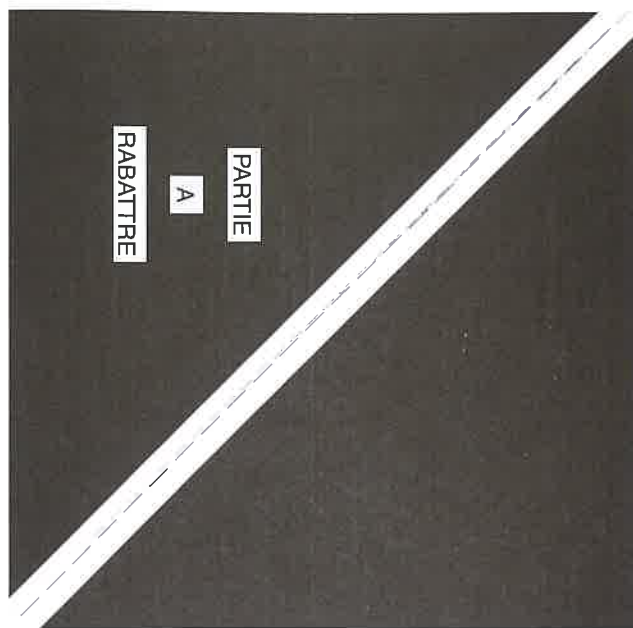
$$\begin{aligned} \text{On a: } \bullet \left| \frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} \right| &\leq \frac{1}{8} (|\cos(x)| + |e^{-y^2}|) \\ &\leq \frac{1}{8} (1 + 1) \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \checkmark \quad y^2 \geq 0$$

$$\text{Donc: } \forall (x, y) \in K, \quad \frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$$

$$\bullet |x \sin(x+y)| \leq |x| \leq \frac{1}{4} \quad (\text{car } (x, y) \in K)$$

$$\text{Soi: } \forall (x, y) \in K, \quad x \sin(x+y) \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$$

On a d'ailleurs que: $F(x, y) \in K$



Donc, on a également: $y \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

Ainsi, $F(x, y) = (x, y)$, alors $(x, y) \in K^2$

2) Soit $(x, y) \in K$, montrer que: $F(x, y) \in K$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \left| \frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} \right| &\leq \frac{1}{8} (|\cos(x)| + |e^{-y^2}|) \\ &\leq \frac{1}{8} (1 + 1) \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \checkmark \quad y^2 \geq 0$$

$$\text{Donc: } \forall (x, y) \in K, \quad \frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$$

$$\bullet \quad |x \tanh(x+y)| \leq |x| \leq \frac{1}{4} \quad (\text{car } (x, y) \in K)$$

$$\text{Soi: } \forall (x, y) \in K, \quad x \tanh(x+y) \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$$

On a déduit que: $F(x, y) \in K$

3) Montrons que F est ^{strictement} contractante dans K muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

$$\forall (x, y) \in K, \quad \|F(x, y)\|_2 \leq L$$

Loi Montrer que:

$$\exists L \in [0; 1[, \quad \forall (x, y) \in K, \quad \|F(x, y)\|_2 \leq L \|(x, y)\|_2$$

On a: $\forall$

$$\|F(x, y)\|_2 = \left| \frac{\cos(x) + e^{-y^2}}{8} \right| + |x \tanh(x+y)|$$

$$\leq |x|$$

Et, $\forall (x, y) \in K,$

On fait

On admettra que F est strictement contractante dans K pour $\|\cdot\|_2$.

4) Ainsi, on a: $F(K) \subset K$ (question 2) et F est strictement contractante sur K pour la norme $\|\cdot\|_2$, donc, on en déduit d'après le théorème du point fixe de Banach que:

F admet un unique point fixe sur K

Car K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc il est compact (d'après le théorème de Weierstrass), et donc K est complet.

Or, la question 1 nous assure que :

$$\text{si } F(x, y) = (x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2, \text{ alors } (x, y) \in K.$$

On a déduit alors par contraposée que F admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}^2$

Or plus, sur $\mathbb{R}^2$, le système
$$\begin{cases} \cos(x) + e^{-x^2} = 8x \\ x \sin(2+x) = x \end{cases}$$
 est équivalent à $F(x, y) = (x, y)$

On en conclut donc que le système admet une unique solution sur $\mathbb{R}^2$ correspondant au point fixe de F .

OK

Problème :

Partie 1 :

1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$.

On suppose que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in X$. Montrons que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Par cela, montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, x \in F_n$.

• Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$, donc, par récurrence immédiate, on sait que : $\forall n \geq n_0, F_n \subset F_{n_0}$.

Ainsi, comme, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$, alors : $\forall n \geq n_0, x_n \in F_{n_0}$.

Or, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et F_{n_0} est un fermé non vide de (X, d) , donc, on a déduit que : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in F_{n_0}$ (i.e. : $x \in F_{n_0}$)

Donc, $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists \in F_{n_0}$

Et donc, on arrive au résultat souhaité : $\exists \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$

(C'est la propriété des fermés emboîtés)

~~2) On suppose maintenant que X est compact.~~

~~On sait que : Si X est compact, et F un fermé de X ,
alors F est un compact de X .~~

~~Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \subset X$ et F_n est un fermé de X .~~

~~$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, F_n$ est compact~~

2) La caractérisation de la compacité de Borel-Lebesgue nous donne :

X compact $\Leftrightarrow$ (Si $\exists (U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E , tel que $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$
alors $\exists J \subset I, J$ fini, $X \subset \bigcup_{i \in J} U_i$)

De la même manière, on en déduit alors la propriété de Borel-Lebesgue avec des fermés de E .

X compact $\Leftrightarrow$ (Si $\exists (F_i)_{i \in I}$ fermés de E , tel que : $X \cap \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset$
alors $\exists J \subset I, J$ fini, $X \cap \left(\bigcap_{i \in J} F_i \right) = \emptyset$)

Par l'absurde, on suppose tel que : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$

Donc : $X \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \emptyset$. Or, X est compact et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés de X , donc d'après Borel-Lebesgue :

$\exists J \subset \mathbb{N}, J$ fini tel que : $X \cap \left(\bigcap_{i \in J} F_i \right) = \emptyset$

Car $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$, on a:

$$X \cap F_{\max J} = \emptyset \Rightarrow \underline{\underline{F_{\max J} = \emptyset}} \quad (\text{car } F_{\max J} \subset X)$$

Or, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés non vide.

Donc, on arrive à une contradiction.

Ainsi: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

3) On suppose que X est complet, et que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$

Montrons que: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$:

• On a: $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \text{diam}(F_n) \leq \varepsilon$

On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$.
Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy:

En effet, $\forall p, q \geq n$, on a: $x_p \in F_n$ et $x_q \in F_n$ car $F_{n+1} \subset F_n$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Et donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \text{diam}(F_n) \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall p, q \geq N_0, d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(F_{N_0}) \leq \varepsilon$$

$\uparrow$
car $x_p, x_q \in F_{N_0}$

Donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$

Or, X est complet, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est de Cauchy, converge dans X

Or, par un raisonnement analogue à la question 1, on montre que: $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$

Donc: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ (car $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$)

4) Or on a par l'identité du parallélogramme:

$$\left\| \frac{x - P_{C_1}(x) + x - P_{C_2}(x)}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - P_{C_1}(x) - (x - P_{C_2}(x))}{2} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\|x - P_{C_1}(x)\|^2 + \|x - P_{C_2}(x)\|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\| x - \frac{P_{C_1}(x) + P_{C_2}(x)}{2} \right\|^2}_{\geq 0} + \left\| \frac{P_{C_2}(x) - P_{C_1}(x)}{2} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\|x - P_{C_1}(x)\|^2 - \|x - P_{C_2}(x)\|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \|P_{C_1}(x) - P_{C_2}(x)\|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|x - P_{C_1}(x)\|^2 + \|x - P_{C_2}(x)\|^2 \right)$$

Or, par propriété de la projection sur un convexe, on a:

$$\underline{d(x, C_1) = \|x - P_{C_1}(x)\|} \quad \text{et} \quad \underline{d(x, C_2) = \|x - P_{C_2}(x)\|}$$

Et, $P_{C_1}(x)$ et $P_{C_2}(x)$ sont les uniques points vérifiant chacun respectivement cette propriété.

Donc $\Rightarrow \underline{\|P_{C_1}(x) - P_{C_2}(x)\|^2 \leq 2(d(x, C_1)^2 - d(x, C_2)^2)}$

b) Soit $x \in X$, montrons que $(d(x, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Mg: $\forall n \in \mathbb{N}, d(x, F_n) \leq d(x, F_{n+1})$.

• Soit $y \in F_n$

$$\text{On a: } d(z, y) \leq d(z, F_{n+1}) + \underbrace{d(y, F_{n+1})}_{\geq 0} \\ \leq d(z, F_{n+1})$$

$$\text{Et } d(z, F_n) = \inf_{y \in F_n} d(z, y)$$

$$\text{Donc } d(z, F_n) \leq d(z, F_{n+1})$$

• Soit $y \in F_{n+1}$, alors $d(z, y) = d(z, F_{n+1})$
 $\Rightarrow d(z, F_n) =$

• En effet, $F_{n+1} \subset F_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$, donc $\inf_{y \in F_n} d(z, y) \leq \inf_{y \in F_{n+1}} d(z, y)$

$$\Rightarrow \underline{d(z, F_n) \leq d(z, F_{n+1})}$$

donc $(d(z, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Non

et les $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, donc $\forall n \in \mathbb{N}, d(z, F_n) \leq \text{diam}(F_0) < +\infty$

Donc $(d(z, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée

Donc $(d(z, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente car X est un espace de Hilbert, donc X est complet

(très riche)

c) Soit $\varepsilon > 0$, on a: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad p < q$

$$d(y_p, y_q) = d(P_{F_p}(x), P_{F_q}(x))$$

] question 4/a)

$$\Rightarrow (d(y_p, y_q))^2 \leq 2(d(x, F_q)^2 - d(x, F_p)^2)$$

Or, $(d(x, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc $(d(x, F_n))^2$ est aussi convergente

Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |d(x, F_n)^2 - l| \leq \varepsilon$ avec
l sa limite.

Donc, $\forall p, q \geq N, p < q, a_0$

$$d(y_p, y_q) \leq \sqrt{2} \sqrt{d(x, F_q)^2 - d(x, F_p)^2}$$

$$\leq \sqrt{2} \sqrt{\varepsilon'}$$

ε' ?

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, p < q, d(y_p, y_q) \leq \varepsilon$

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

d) (y_n) est de Cauchy dans E et donc converge dans E car
 E est complet

Donc, en utilisant la question 3, on en déduit que

$$\underline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset} \quad \text{car} \quad y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \in \underline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n}$$



Propriété 21

1) par définition, $\overset{\circ}{A} = \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A\}$

Donc : • Si A contient une boule ouverte non vide, alors, $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, donc, comme $\overset{\circ}{A} \subset A$, on en déduit que A est non vide

• Si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors $\exists x \in \overset{\circ}{A}$, donc par définition, $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A$ donc A contient une boule ouverte non vide.

2) On suppose que : $\exists O$ ouvert non vide et (F_n) suite de fermés tel que : $O \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

Virginia commence à jouer $U_0 = O$, et à chaque V_n de Paul, Virginia choisit $U_{n+1} = V_n \setminus F_n$.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus F_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (V_n \cap F_n^c) \\ &= \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } O \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c \subset O^c$$

et $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \subset O$ car Paul joue après Virginia au début, donc $V_0 \subset O$ et $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \subset O$ par récurrence immédiate (c'est la règle du jeu).

$$\text{Donc, } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset O \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c \subset O^c$$

$$\text{Donc, par définition, } \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c \right) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$$

Une Vierge est certaine de gagner. ✓

$$3) \text{ On pose } X = \mathbb{Q} = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q} \right\}$$

Alors, avec la distance usuelle, il n'existe aucun ouvert non vide inclus dans X .

Donc, il est impossible de commencer à jouer, donc il n'y a pas de stratégie gagnante. **Non**

$$4) a) \text{ Montrons que : } \overline{B(x, r)} \subset B_f(x, r)$$

On prend une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B(x, r)^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in X \quad \text{et} \quad d(y_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r$$

Alors dans ce cas, $y \in \overline{B(x, r)}$ par définition de l'adhérence, et $d(y, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r$ implique que : $ry \in B_f(x, r)$.

$$\text{Donc } \overline{B(x, r)} \subset B_f(x, r)$$

b) Soit tout ouvert non vide U de X , on a : $\emptyset = U$ par définition, donc d'après la question 1, on a : U contient une boule ouverte non vide.

$$\text{il : } \exists x_0 \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x_0, \varepsilon) \subset U$$

On considère alors $V = B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Alors $\overline{V} \subset B_f(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ d'après la question 4) a), et par définition,

$$\overline{B_f(x_0, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B_f(x_0, \varepsilon)$$

$$\text{Donc } \overline{\exists V \text{ ouvert non vide tel que } \overline{V} \subset U}$$

erreur
 $\mathbb{Q}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{Q}$

que toutes vos précisions ?

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \bar{V}_n$ est un fermé de X , avec X compact.

~~Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \bar{V}_n$ est un compact de X~~ et $\forall n \in \mathbb{N}, \bar{V}_{n+1} \subset \bar{V}_n$

Il en résulte d'après la partie 1 question 2 que :

↑
règle du
plan

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \neq \emptyset$$

Donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}, \bar{V}_n \subset U_n$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$

$$\text{Donc } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$$

Donc Paul a une stratégie gagnante

Partie 3:

$$1) F_n = \left\{ g \in L^1(\mu) \mid \forall k \in \mathbb{N}, \left| \int_{\Omega} f_k g \, d\mu \right| \leq n \right\}$$

$$F_n =$$

5) Si X est compact, alors; d'après la 4)c) et la 3),

l'ensemble $d_{\text{Haus}}(\bar{V}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que

Paul a une stratégie gagnante.

et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$ car $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \neq \emptyset$

Pens fait

pourquoi

$d_{\text{Haus}}(\bar{V}_n) \rightarrow 0$
?

que sont les ouverts
 V_n ?